



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Экономика и менеджмент в машиностроении»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
по дисциплинам

«Методы принятия управленческих решений»,
«Методы обоснования управленческих
решений»

«Системы массового обслуживания»

Авторы
Иваночкина Т.А.,
Пешхоев И.М.

Ростов-на-Дону, 2016



Аннотация

Методическое пособие предназначено для усвоения основного материала по дисциплинам «Методы принятия управленческих решений», «Методы обоснования управленческих решений» студентами направлений 38.03.01, 38.03.02.

Авторы

доцент

Иваночкина Т.А.

к.ф.-м.н., доцент

Пешхоев И.М.



Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ.....	4
ПРИМЕР 1	7
ПРИМЕР 2	9
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	11

Системы массового обслуживания

ВВЕДЕНИЕ

Теория массового обслуживания возникла как один из математических методов для анализа сложных многоканальных объектов обслуживающих поступающие требования.

К таким объектам относятся технологические конвейеры, телефонные линии, очереди в супермаркетах, поликлиники, пункты «скорой помощи» и другие системы массового обслуживания (СМО).

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ**Модели теории массового обслуживания**

Теория массового обслуживания получила еще название «теория очередей».

Разнообразные объекты систем массового обслуживания связывает общий принцип их работы - обслуживание заявок. Это супермаркеты, библиотеки, телефонные станции, таможенные пункты пропуска и другие системы.

В качестве каналов обслуживания могут быть продавцы, таможенники, парикмахеры медицинские работники, провода, рельсы, трубы.

В качестве заявок выступают покупатели, документы, вагоны, телефонные звонки, денежные купюры и др.

В СМО каждая заявка проходит 3 основных этапа:

1- появление заявки на входе в систему;

2- прохождение очереди;

3- процесс обслуживания, после которого заявка покидает систему.

Первый этап определяется числом заявок на входе в систему, режимом поступления заявок в систему обслуживания и поведением клиентов.

Число заявок может быть ограниченным, или неограниченным, как например, автомобили, проходящие через пропускные пункты на границе.

Режим поступления заявок в систему на обслуживание может быть дискретным (например, один пациент на прием к терапевту каждые 15 минут) или случайным, например, обращение больного в регистратуру поликлиники.

Появление клиентов на входе в систему может быть следующим:

- заявка, поступившая в систему, встает в очередь и дожидается обслуживания;

Системы массового обслуживания

- заявка может покинуть систему, не дождавись обслуживания.

Характеристики очереди:

- длина;
- правило обслуживания.

Длина очереди может быть ограничена или неограничена.

Чаще всего правило обслуживания: «Первый пришел – первым обслужился», в некоторых случаях к этому правилу могут существовать приоритеты (ветераны войны обслуживаются вне очереди).

Характеристика процесса обслуживания включает в себя конфигурацию системы обслуживания и режим обслуживания.

Конфигурации систем различаются:

- по числу каналов обслуживания (количество касс в супермаркете),

- по числу фаз обслуживания (двухфазная система: первая фаза – получить талон к врачу в регистратуре поликлиники, вторая – прием у врача).

Режим обслуживания характеризуется либо постоянным, либо случайным временем обслуживания.

Интенсивность входного потока заявок λ определяется средним числом требований, поступающих в единицу времени.

Среднее время обслуживания заявки в системе обозначается как t , тогда отношение

$$\mu = \frac{1}{t}$$

определяет интенсивность обслуживания. Она характеризует производительность каждого канала и равна среднему числу заявок, обслуженных в единицу времени.

Отношение

$$r = \frac{\lambda}{\mu}$$

называют коэффициентом загрузки системы.

Для многоканальной системы обслуживания должно выполняться условие

$$\frac{r}{n} < 1,$$

где n количество каналов обслуживания, в противном случае очередь будет расти до бесконечности.

Системы массового обслуживания

Модель 1. Модель одноканальной системы массового обслуживания со случайным входным потоком заявок и случайным временем обслуживания (с пуассоновским входным потоком заявок и экспоненциальным временем обслуживания).

Формулы для описания этой модели:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad \text{- среднее число клиентов в системе;}$$

$T_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$ - среднее время обслуживания одного клиента в системе (ожидание и обслуживание);

$$L_o = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad \text{- среднее число клиентов в очереди;}$$

$$T_o = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad \text{- среднее время ожидания клиента в}$$

очереди;

$$P_0 = 1 - r \quad \text{- вероятность отсутствия заявок в системе;}$$

$$P_{n>r} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} \quad \text{- вероятность того, что в системе}$$

больше чем k заявок.

Модель 2. Многоканальная система обслуживания с пуассоновским входным потоком заявок и экспоненциальным временем обслуживания.

В системе обслуживания функционируют 2 или более каналов.

Формулы для описания системы:

$$P_0 = \left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \dots + \frac{r^n}{n!} + \frac{r^{n+1}}{n! \cdot (n - r)}\right)^{-1} -$$

вероятность того, что система свободна;

$$P_n = \frac{r^n}{n!} \cdot P_0 \quad \text{- вероятность того, что в системе}$$

находится n заявок;

Системы массового обслуживания

$$P_q = \frac{r^{n+1}}{n!(n-r)} \cdot P_0 \quad - \text{вероятность того, что заявка ока-}$$

жется в очереди;

$$L_0 = \frac{r^{n+1} \cdot P_0}{n \cdot n! \cdot (1 - \frac{r}{n})^2} \quad - \text{среднее число заявок в}$$

очереди;

$$L_s = L_0 + r \quad - \text{среднее число заявок в системе;}$$

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot L_0 \quad - \text{среднее время нахождения заявки в}$$

очереди;

$$T_s = \frac{1}{\lambda} \cdot L_s \quad - \text{среднее время нахождения заявки в}$$

системе.

Модель 3. Модель с пуассоновским входным потоком за-
явок и с постоянным временем обслуживания, например, автома-
тическая мойка.

Формулы, описывающие модель:

$$L_0 = \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu(\mu - \lambda)} \quad - \text{средняя длина очереди;}$$

$$T_0 = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu(\mu - \lambda)} \quad - \text{среднее время ожидания в очереди;}$$

$$L_s = L_0 + \frac{\lambda}{\mu} \quad - \text{среднее число клиентов в системе;}$$

$$T_s = T_0 + \frac{1}{\mu} \quad - \text{среднее время нахождения в системе.}$$

ПРИМЕР 1

Пусть СМО является одноканальной с пуассоновским вход-
ным потоком заявок и экспоненциальным временем обслужива-
ния.

Делопроизводитель оформляет документацию. В среднем в
час поступает на оформление 2 дела. Среднее время на оформ-
ление одного дела составляет 20 минут.

Необходимо определить основные параметры СМО.

Системы массового обслуживания

Интенсивность входного потока заявок составит

$$\lambda = 2 \text{ заявки/час,}$$

среднее время обслуживания заявки составит

$$\mu = 1/t = 1/(1/3) = 3 \text{ заявки/час.}$$

$$\text{Загрузка системы } r = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} = 0.667.$$

В результате расчетов получим:

Среднее число дел у делопроизводителя составит

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3 - 2} = 2.$$

Среднее время ожидания клиента (прохождение очереди и оформление дела)

$$T_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3 - 2} = 2 \text{ часа.}$$

Среднее число клиентов в очереди

$$L_o = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2^2}{3 \cdot (3 - 2)} = 1.333.$$

Среднее время ожидания клиента в очереди

$$T_o = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3 \cdot (3 - 2)} = 0.667 \text{ часа} = 40 \text{ мин.}$$

Вероятность отсутствия заявок в системе

$$P_0 = 1 - r = 1 - \frac{2}{3} = 0.333.$$

Вероятность того, что в системе больше чем 1 заявок

$$P_{n>1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{1+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0.444.$$

Вероятность того, что в системе больше чем 2 заявки

$$P_{n>2} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} = 0.296.$$

Вероятность того, что в системе больше чем 3 заявки

Системы массового обслуживания

$$P_{n>3} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{3+1} = \frac{16}{81} = 0.198.$$

Вероятность того, что в системе больше чем 4 заявки

$$P_{n>4} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{4+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = 0.093.$$

Управленческое решение: Время ожидания заявки в очереди слишком велико. Следует привлечь к работе еще одного делопроизводителя.

ПРИМЕР 2

Многоканальная система обслуживания.

В налоговую инспекцию в течение 1-го квартала поступают на проверку в среднем 20 деклараций в час от физических лиц. Налоговый инспектор тратит на прием и проверку одной декларации в среднем 6 минут. Необходимо рассчитать количество работников, чтобы параметры очереди были допустимыми.

Интенсивность входного потока клиентов:

$$\lambda = 20 \text{ дек./час,}$$

среднее время обслуживания заявки составит

$$\mu = 1/t = 1/(1/10) = 10 \text{ заявок/час.}$$

Условие, что очередь не растет до бесконечности

$$\frac{r}{n} < 1,$$

где n-число каналов обслуживания (инспекторов).

$$r = \frac{\lambda}{\mu} = 2, \text{ отсюда } n \geq 3.$$

Рассчитаем параметра СМО при n=3.

Вероятность того, что система свободна

$$P_0 = \left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \dots + \frac{r^n}{n!} + \frac{r^{n+1}}{n! \cdot (n-r)}\right)^{-1}$$

$$P_0 = \left(1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{6 \cdot 1}\right)^{-1} = 0.111$$

т.е. 11% времени система свободна.

Вероятность того, что в системе находится 3 заявки

Системы массового обслуживания

$$P_n = \frac{r^n}{n!} \cdot P_0 ;$$

$$P_3 = \frac{2^3}{6} \cdot 0.111 = 0.148 .$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди

$$P_q = \frac{r^{n+1}}{n!(n-r)} \cdot P_0 = \frac{2^4}{3 \cdot 1} \cdot 0.111 = 0.592 .$$

Среднее число заявок в очереди

$$L_0 = \frac{r^{n+1} \cdot P_0}{n \cdot n! \cdot (1 - \frac{r}{n})^2} = \frac{2^4 \cdot 0.111}{3 \cdot 6 \cdot (1 - \frac{2}{3})^2} = 0.888 .$$

Среднее число заявок в системе

$$L_s = L_0 + r = 0.888 + 2 = 2.888 .$$

Среднее время нахождения заявки в очереди

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot L_0 = \frac{0.888}{20} = 0.044 \text{ часа (2.64 минуты)} .$$

Среднее время нахождения заявки в системе

$$T_s = \frac{1}{\lambda} \cdot L_s = \frac{2.888}{20} = 0.144 \text{ часа (8.64 минуты)} .$$

Управленческое решение: Параметры очереди удовлетворительные, поэтому принимаем решение, что для нормальной работы достаточно задействовать 3 инспектора, осуществляющих приём и проверку налоговых деклараций.

Задание

а) Рассчитать параметры одноканальной системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком заявок и экспоненциальным временем обслуживания

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	3	4	5	3	6	7	4	6	8	3
μ	5	6	8	4	9	8	7	8	9	6
№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
λ	5	7	6	4	3	5	9	11	7	14
μ	6	9	7	5	7	7	11	12	10	15
№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
λ	8	10	6	7	8	12	9	15	6	5
μ	10	14	10	11	12	14	10	17	11	10

Системы массового обслуживания

б) Рассчитать параметры многоканальной системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком заявок и экспоненциальным временем обслуживания.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	5	6	8	4	9	8	7	8	9	6
μ	3	2	3	2	5	5	6	7	6	3
№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
λ	6	9	7	5	7	7	11	12	10	15
μ	5	7	4	2	5	2	6	5	4	8
№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
λ	10	14	10	11	12	14	10	17	11	10
μ	7	10	5	7	6	12	6	11	8	7

Список использованных источников

1. Афанасьев М.Ю. , Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследование операций: Учебное пособие. – М.: ИНФА – М, 2009. – 352 с.
2. Невежин Ю.В., Исследование операции и принятия решений в экономике: учебное пособие для вузов – М.: Форум, 2012г
3. Лугинин О.Е., Экономико-математические методы и модели: теория и практика с решением задач: учебн. пособие, Ростов н/Д, «Феникс», 2009г